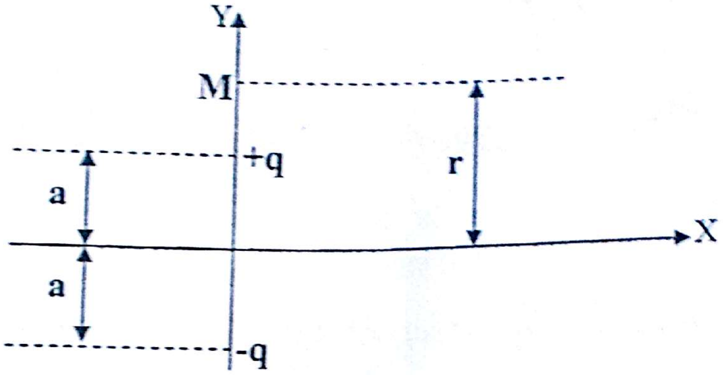
Université Mohammed V
Faculté des sciences
Département de physique

Année universitaire 2016-2017
SMIA- S2

Série n°2 d'électrostatique

Champ, force et potentiel électrostatiques : Calcul direct

I. a) Trouver le champ électrostatique créé en un point M par le couplet suivant :



b) Monter que lorsque a est négligeable devant r, le champ au point M est proportionnel à $\frac{1}{r^3}$.

c) Une charge Q est placée en M. Calculer la force que subit cette charge.

II. Un fil AB de longueur L porte une distribution linéaire de charges de densité uniforme $\lambda \rangle 0$.
Calculer le champ électrostatique créé par ce fil en un point M situé sur sa médiatrice.

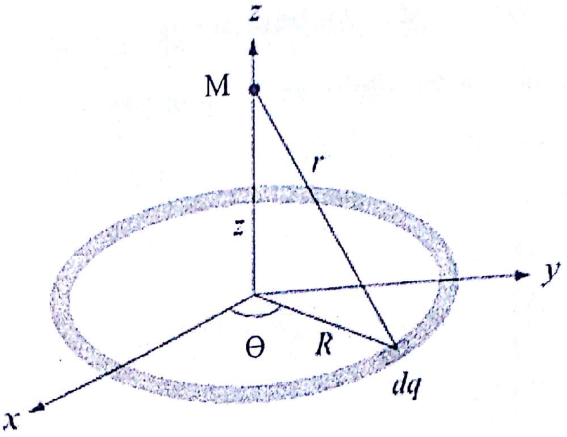
III. Soit une couronne circulaire de centre O, de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 portant une distribution surfacique de charges de densité $\sigma \rangle 0$.
Déterminer le champ qu'elle crée en un point M de son axe OZ.

IV . Un anneau filiforme de centre O et de rayon R, porte une charge Q uniformément répartie sur sa circonférence. Calculer le champ électrostatique créé en un point M de son axe de révolution situé à la distance z de 0. Que devient le champ pour x=0 et x>>R ?

V. Une charge positive *q* est distribuée uniformément sur un segment de longueur *2a* porté par un axe *Oy* d'un repère *Oxy*. L'axe *Ox* étant médiatrice de *AB*.
1) Quelle est la densité linéique de charge λ ?
2) Quelle est l'expression de la force exercée par cette charge sur une charge ponctuelle positive *Q* placée en un point *M* d'abscisse *x* sur l'axe *Ox*?

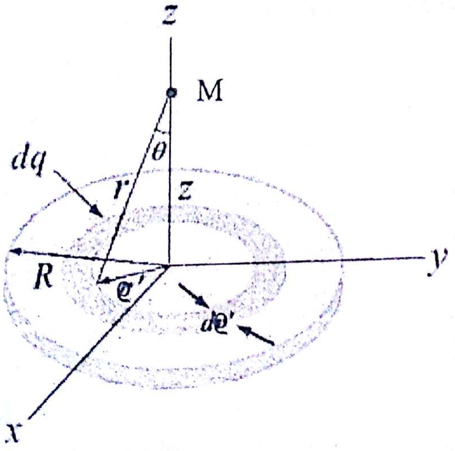
VI. Un anneau filiforme de rayon R porte une distribution linéaire de charges de densité uniforme λ>0.

a) Déterminer le potentiel créé par le fil à une distance z de son axe central.
b) En déduire le champ.



VII. On considère un disque de rayon R portant une distribution de charges uniforme σ.

a) Calculer le potentiel à une distance z de son axe central.
b) Quel est le potentiel au centre du disque en déduire la continuité du potentiel.
c) Etudier le cas où z est grand devant R et commenter le résultat
d) Déduire de a) le champ.
e) En déduire le champ pour un plan infini.

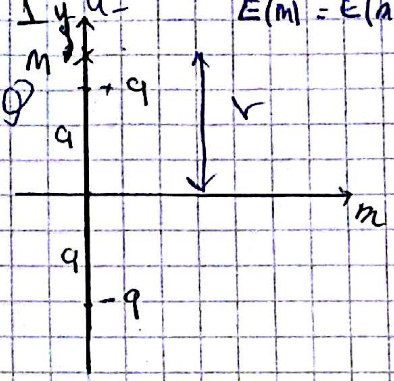


Serie 2:

Champ, force et potentiel :

I a-

$\vec{E}(M) = \vec{E}(x,y,z)$



$\vec{E}^+(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(+q)}{(r-a)^2}\cdot\vec{j}$

$\vec{E}^-(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{(r+a)^2}\cdot\vec{j}$

$\vec{E}_T(M) = \vec{E}^-(M) + \vec{E}^+(M)$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{j}\left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2}\right]$

b- $(r-a)^2 = r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2$ $a \ll r$

$(r+a)^2 = r^2\left(1+\frac{a}{r}\right)^2$

$\vec{E}_T(M) = \frac{q\vec{j}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1+\frac{2a}{r} - 1 + \frac{2a}{r}\right]$

$\vec{E}_T(M) = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{j} \Rightarrow \vec{E}_T(M) = \varphi\frac{1}{r^3}$

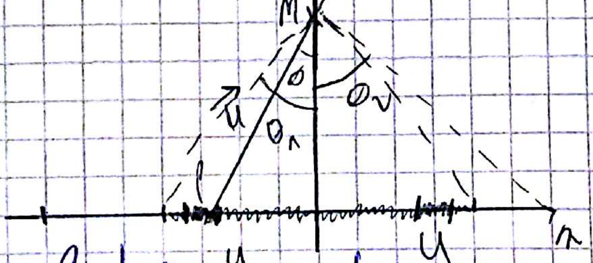
$\frac{1}{(r+a)^2} = (r+a)^{-2} = r^{-2}\cdot\left[1+\frac{a}{r}\right]^{-2}$

$\frac{1}{(r-a)^{-2}} = (r-a)^{-2} = r^{-2}\left[1-\frac{a}{r}\right]^{-2}$.

$r \gg a$: $\left(1+\frac{a}{r}\right)^{-2} \simeq 1-\frac{2a}{r}$

$\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-2} \simeq 1+\frac{2a}{r}$.

c- φ va subir une force de la part des charges. $\vec{E}(M) = \varphi\vec{E}(M)$-



$P_1 \perp Ox$ $h = xOy$.

la mediatrice ⊥ Ox est plan de symetrie

le plan xOy est plan de symetrie.

$\vec{E}(M) \in$ Intersection de ces 2 plans.

$\underline{M \in P_1 \Rightarrow \vec{E}(M) \in P_1}$.

$\vec{E}(M) = \vec{E}(x,y,z)$ par appli de symetrie

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(y)$

$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$.

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta\,\vec{j}$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{r^2}\cos\theta\,\vec{j}$.

$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\vec{j}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx\cos\theta}{r^2}$

$\cos\theta = \frac{y}{r}$ $tg\,\theta = \frac{x}{y}$.

$\frac{dx}{y} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow dx = y\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$.

$\frac{\cos^2\theta}{y^2} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{dx\cos^2\theta}{y^2} = \frac{y\,d\theta\cos\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta\;y^2}$

$= \frac{\cos\theta}{y}d\theta$.

$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\vec{j}}{4\pi\varepsilon_0 y}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta$.

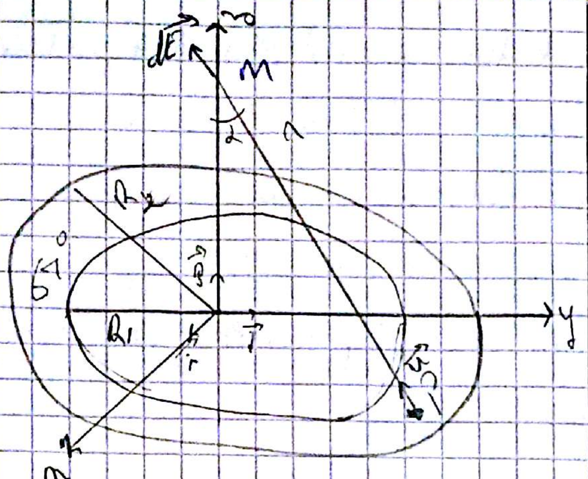
$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\vec{j}}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_2\right]$

$\sin\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$; $\sin\theta_1 = \frac{-a}{\sqrt{a^2+y^2}}$

$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\vec{j}}{4\pi\varepsilon_0 y}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$

$\vec{E}(M) = \frac{\lambda a\,\vec{j}}{2\pi\varepsilon y\sqrt{a^2+y^2}}$

V -



Etude de la symetrie du systeme :

Soit P_i plan coupant la couronne selon un diametrie et contenant M. P_i est plan de symetrie

Soit $P_j \perp P_i$ et contenant M est plan de symetrie $P_i \cap P_j$ = axe de symetrie (Oz)

M ∈ axe (Oz) $\vec{E}(M)$ l'est aussi

+ invariance par rotation θ $\vec{E}$ ne depend que de z.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(z)\vec{k}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r^2}\vec{u}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \\ \vec{E}(M) = E(z)\vec{k}\end{array}\right\}$$ une seule composante suivant $\vec{k}$.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r^2}\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta \; ; \quad \cos\alpha = \frac{z}{r}$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,\rho\, d\rho\, d\theta}{r^3} z\,\vec{k}$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int d\theta$$

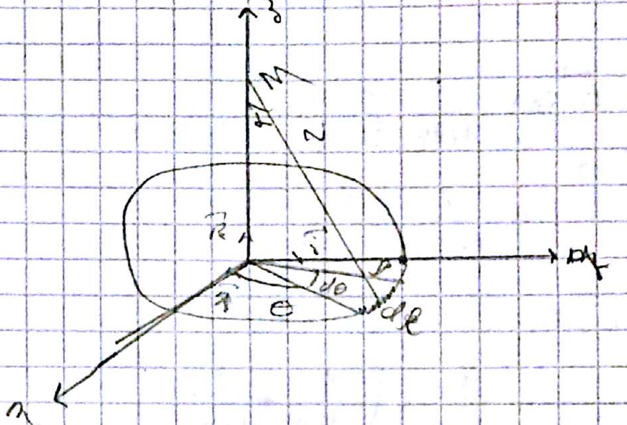
Rq : $\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -d(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\left[-d(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\vec{k}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]\cancel{\vec{k}}\,2\pi$$

$$= \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]\vec{k}$$

VI -



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \; ; \quad dq = \lambda\, dl$$

$$dl = R\, d\theta \Rightarrow dq = \lambda R\, d\theta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda R}{r}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\, 2\pi}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\varphi_S = \sigma\, 4\pi R^2 \\ \varphi_V = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3\end{array}\right.$$

$$E = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \left\{-\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \; ; \; -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \; ; \; -\frac{\partial V}{\partial z} = \cdot \right\}$$

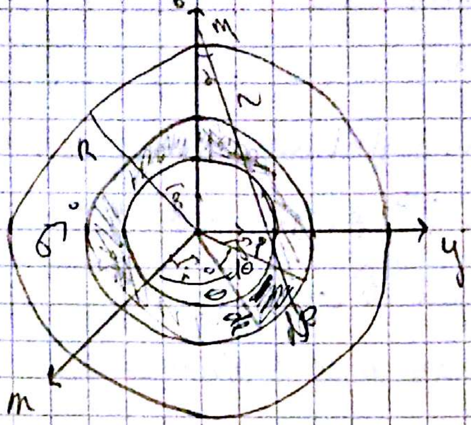
$\vec{E}$ est suivant l'axe de symetrie Oz

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(z)\vec{k}$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

VII -



1) $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$

$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$

$dq = \sigma\, dS = \sigma\, \rho d\rho d\theta$

$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\, d\theta$

$dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\, d(\rho^2+z^2)^{1/2}\, d\theta$

$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-\sqrt{z^2}\right] 2\pi$

$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right].$

b) $z>0$; $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-z\right]$

$z<0$; $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}+z\right]$

Si $z \to 0$

$V(0^+) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$
$V(0^-) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$
$\Big\} \to V(0^+) = V(0^-) \to$ continuité.

c) $z \gg R$.

$\sqrt{R^2+z^2}-|z| = |z|\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-|z|$

$= |z|\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)-|z| = \frac{|z|R^2}{2z^2}$

$z>0$ ou $z<0$ $\Big\} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|z|R^2}{2z^2}$

$\Downarrow$ $V = \pm\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zR^2}{z^2}\frac{\pi}{\pi}$

$\varphi = \sigma R^2\pi$. $V = \pm\frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 z}.$

R. q: le disque se comporte comme une charge ponctuelle.

d) $E = -\vec{grad}\, V = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$.

$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right]$

$z>0$

$\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}-1\right].$

$= \frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}-\frac{1}{z}\right]$

$z<0$ $\vec{E} = \frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}+\frac{1}{z}\right]$

e) $R \to \infty$

$z>0$ $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$z<0$ $E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$\Big\} \Rightarrow$ discontinuité.